

# Modèle Fluide Stochastique

Hédi Nabli

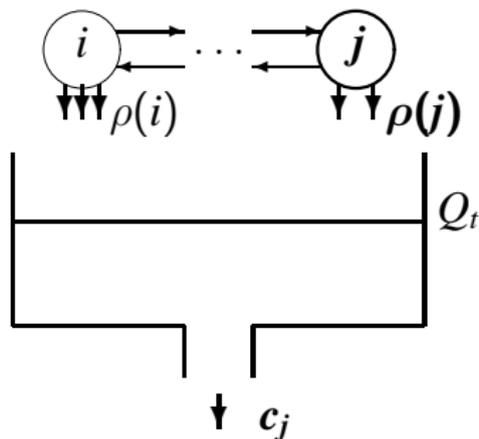
Prof. en Mathématiques Appliquées  
Faculté des Sciences de Sfax

5 Mars 2012

- 1 Modèle fluide stochastique : Quoi ?
- 2 Modèle mathématique
- 3 Méthodes de résolution
  - Spectrale
  - Polynômes orthogonaux
- 4 Méthode générale basée sur l'uniformisation
  - Buffer de capacité infinie
  - Buffer de capacité finie
- 5 Etude comparative
- 6 Conclusion et perspectives

## Modéliser le trafic dans un réseau à haut débit

Débits d'entrée/sortie gérés par une CMTC de générateur infinitésimal A



On traitera les deux cas suivants :

Buffer à capacité infinie

Buffer à capacité finie

Soit  $X_t$  : l'état à l'instant  $t$  gouvernant les entrées/sorties

- Hypothèses

$(X_t)_{t \geq 0}$  est une CMI sur un espace d'états fini  $S$  et de g.i. A

- Données

A chaque état  $i \in S$ , on note :

$r_i$  : débit d'entrée associé à l'état  $i$

$c_i$  : débit de sortie associé à l'état  $i$

Alors  $d_i = r_i - c_i$  correspond au débit d'entrée effective relatif à  $i$

- Objectif

Déterminer numériquement la distribution de

$Q_t$  = niveau du liquide dans le buffer à l'instant  $t$

$Q_\infty$  = niveau du liquide en régime stationnaire

Pour  $t > 0$ ,  $x \geq 0$  et  $i \in S$ , on pose :

$$F_i(t, x) = \mathbb{P}(Q_t \leq x, X_t = i)$$

Il a été prouvé que

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(t, x) = -d_i \frac{\partial F_i}{\partial x}(t, x) + \sum_{j \in S} F_j(t, x) A_{ji}, \quad \forall i \in S$$

En posant  $\mathbf{F}(t, x) = (F_i(t, x), i \in S)$ , on obtient la forme matricielle

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t, x) D + \mathbf{F}(t, x) A$$

avec  $D = \text{diag}(d_i, i \in S)$  : matrice diagonale

On pose :

$$F_i(x) = F_i(\infty, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Q_t \leq x, X_t = i)$$

Sous la condition de stabilité  $\rho < 1$  (capacité infinie), le processus  $((Q_t, X_t))_{t \geq 0}$  converge en loi vers  $(Q_\infty, X_\infty)$ . D'où :

$$F_i(x) = \mathbb{P}(Q_\infty \leq x, X_\infty = i), \quad \forall x \geq 0, \quad \forall i \in S$$

Par passage à la limite, l'égalité

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t, x)D + \mathbf{F}(t, x)A$$

donne :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(\infty, x)D = \mathbf{F}(\infty, x)A \Rightarrow \mathbf{F}'(x)D = \mathbf{F}(x)A$$

# Conditions aux limites

On note  $S^+ = \{i \in S / d_i > 0\}$  et  $S^- = \{i \in S / d_i \leq 0\}$ .

**Capacité infinie** (sous l'hypothèse  $\rho < 1$ )

- $F_i(0) = \mathbb{P}(Q_\infty \leq 0, X_\infty = i) = 0, \forall i \in S^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Q_\infty \leq x, X_\infty = i) = \mathbb{P}(X_\infty = i) = \pi_i, \quad \forall i \in S$

**Capacité finie  $B$**

- $F_i(0) = \mathbb{P}(Q_\infty \leq 0, X_\infty = i) = 0, \forall i \in S^+$
- $\lim_{x \rightarrow B^-} F_i(x) = \lim_{x \rightarrow B^-} \mathbb{P}(Q_\infty \leq x, X_\infty = i) = \mathbb{P}(X_\infty = i) = \pi_i, \quad \forall i \in S^-$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(x)A = \mathbf{F}'(x)D \\ F_i(0) = 0, \forall i \in S^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = \pi_i, \forall i \in S. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(x)A = \mathbf{F}'(x)D \\ F_i(0) = 0, \forall i \in S^+ \\ \lim_{x \rightarrow B^-} F_i(x) = \pi_i, \forall i \in S^-. \end{array} \right.$$

# Forme générale de la solution

- $D$  inversible ( $d_i \neq 0, \forall i \in S$ )

$$\mathbf{F}(x)A = \mathbf{F}'(x)D \Leftrightarrow \mathbf{F}'(x) = \mathbf{F}(x)AD^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(0) \exp(xAD^{-1})$$

- $D$  singulière ( $\exists i \in S/d_i = 0$ )

Considérer la partition

$$S = \hat{S} \cup S_0, \text{ avec } \hat{S} = \{i/d_i \neq 0\} \text{ et } S_0 = \{i/d_i = 0\}$$

Alors, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{\hat{S}}(x)\hat{D} = \mathbf{F}_{\hat{S}}(x)\hat{A} & \text{avec } \hat{A} = A_{\hat{S}\hat{S}} - A_{\hat{S}S_0}A_{S_0S_0}^{-1}A_{S_0\hat{S}} \\ \mathbf{F}'_{S_0}(x) = -\mathbf{F}_{\hat{S}}(x)A_{\hat{S}S_0}A_{S_0S_0}^{-1} \end{cases}$$

# Unicité de la solution

Nabli et Ouerghi (*Perf. Eval 2009*)

La solution générale du système différentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{F}(x)A = \mathbf{F}'(x)D \\ F_i(0) = 0, \forall i \in S^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = \pi_i, \forall i \in S. \end{cases}$$

est de la forme  $\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(0) \exp(xAD^{-1})$ .

## Problèmes

Comment déterminer la C.I. :  $\mathbf{F}(0) = (\mathbb{P}(Q_\infty \leq 0, X_\infty = i), i \in S)$  ?

## Théorème

*Sous la condition de stabilité  $\rho < 1$ , la matrice  $AD^{-1}$  admet exactement  $|S^-| - 1$  vp sur  $\mathbb{C}^+$ ,  $|S^+|$  vp sur  $\mathbb{C}^-$  et une seule vp nulle.*

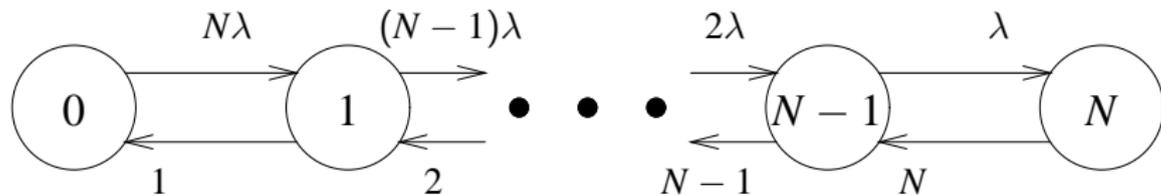
- 1  $F_i(0) = 0, \forall i \in S^+$ .
- 2  $\mathbf{F}(0) \perp \prec v/vp \in \mathbb{C}^+ \succ : |S^-| - 1$  équations linéaires
- 3  $\mathbf{F}(x)A = \mathbf{F}'(x)D \Rightarrow \sum d_i F'_i(x) = 0 \Rightarrow \sum d_i \pi_i = \sum d_i F_i(0)$ .

# 1ère approche : Méthode spectrale

Anick, Mitra et Sondhi, Publié en 1981

## • Modèle considéré

- $N$  sources ON/OFF indépendantes et identiques
- Chaque source vérifie
  - ON : débit = 1, durée  $\sim \text{Exp}(1)$
  - OFF : débit = 0, durée  $\sim \text{Exp}(\lambda)$



## • Hypothèses

- 1 Le PM  $(X_t)_{t \geq 0}$  est supposé être un PNM particulier
- 2 Flux d'entrée associé à l'état  $i$  :  $r_i = i, \forall i \in S$
- 3 Flux de sortie constant :  $c_i = c, \forall i \in S$
- 4  $D = \text{diag}(d_i, i \in S)$  inversible :  $d_i = i - c \neq 0, \forall i \in S = \{0, \dots, N\}$

# Solution AMS

- Chaque vp  $z$  de  $AD^{-1}$  est solution d'une équation trinôme
- Ces vp sont toutes simples

$$z_{N-[c]-1} < \cdots < z_0 < z_N = 0 < z_{N-1} < \cdots < z_{N-[c]}$$

- Le vecteur propre  $\mathbf{v}^{(i)}$  associé à  $z_i$  est donné par :

$$v_j^{(i)} = (-1)^{N-j} \sum_{l=0}^k C_k^l C_{N-k}^{i-l} r_1^{k-l} r_2^{N-k-i+l} \text{ avec } k = \frac{z_i c - N\lambda + N\lambda r_1}{\lambda(r_1 - r_2)}$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(0) \exp(xAD^{-1}) \Rightarrow \mathbf{F}(x) = \sum_{i=0}^N b_i e^{z_i x} \mathbf{v}^{(i)}$$

- Les conditions  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = 0$  donnent  $b_i = 0 \quad \forall i/z_i > 0$
- $F_i(0) = \pi_i$ , pour  $i \in S^+$ , donnent  $b_i = -\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^N \prod_{j \neq i} \frac{z_j}{z_j - z_i}$

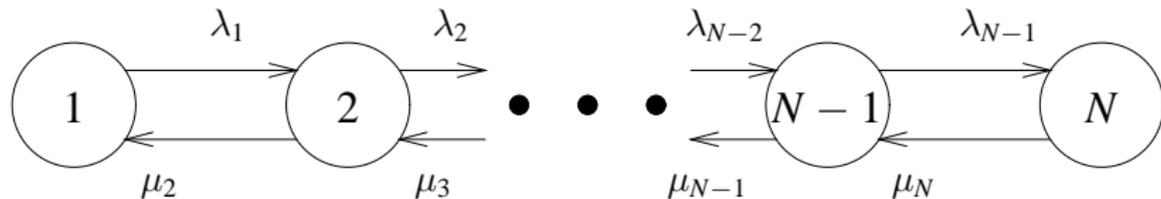
$$\Rightarrow \mathbf{F}(x) = b_N \mathbf{v}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-[c]-1} b_i e^{z_i x} \mathbf{v}^{(i)}$$

# 2ième approche : Polynômes orthogonaux

Van Doorn et Scheinhardt, Publié en 1997

- **Modèle considéré**

- $(X_t)_{t \geq 0}$  est un PNM arbitraire sur  $S = \{1, \dots, N\}$



- **Hypothèses**

- 1 Le PM  $(X_t)_{t \geq 0}$  est supposé être un PNM arbitraire
- 2 Flux d'entrée associé à l'état  $i$  arbitraire :  $r_i \geq 0, \forall i \in S$
- 3 Flux de sortie variable :  $c_i \geq 0, \forall i \in S$
- 4  $D = \text{diag}(d_i, i \in S)$  non singulière :  $d_i = r_i - c_i \neq 0, \forall i \in S$

- Soit  $(\Delta_n(x))_{n \geq 0}$  la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \Delta_n(x) = \left(x + \frac{\lambda_n}{d_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{d_{n+1}}\right) \Delta_{n-1}(x) - \frac{\lambda_n \mu_n}{d_n^2} \Delta_{n-2}(x) \\ \Delta_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_1(x) = x + \frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\lambda_2}{d_2} \end{cases}$$

- $x\Delta_{N-1}(x)$  est le polynôme caractéristique de  $AD^{-1}$
- La suite  $(\Delta_n(x))_{n \geq 0}$  sont 2 à 2 orthogonaux (Th. de Favard)
- Les racines de  $\Delta_{N-1}(x)$  sont réelles et simples
- Chaque vecteur propre  $\mathbf{v}^{(j)}$  associé à la vp  $z_j$  vérifie

$$\mathbf{v}^{(j)} AD^{-1} = z_j \mathbf{v}^{(j)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_i v_i^{(j)} = (d_{i-1} z_j + \lambda_{i-1} + \mu_{i-1}) v_{i-1}^{(j)} - \lambda_{i-2} v_{i-2}^{(j)} \\ v_1^{(j)} = 1 \quad \text{et} \quad \mu_2 v_2^{(j)} = d_1 z_j + \lambda_1 \end{cases}$$

En conclusion, la distribution jointe de  $(Q_\infty, X_\infty)$  s'écrit :

$$\mathbf{F}(x) = \boldsymbol{\pi} + \sum_{j=0}^{d_+} b_j e^{z_j x} \mathbf{v}^{(j)} \quad \text{où } (b_j) \text{ est solution du SL}$$

$$\pi_i + \sum_{j=0}^{d_+} b_j v_i^{(j)} = 0 \quad \text{pour } i \in S^+$$

- Basée sur : **Uniformisation**

A la place du gi  $A$ , on travaille sur la matrice stochastique

$$P = \frac{A}{\lambda} + I \quad \text{avec} \quad \lambda = \max\{-a_{ii}/i \in S\}$$

- Elle n'est pas spectrale.
- S'applique aux modèles fluides généraux

## Hypothèses

- 1 Le PM  $(X_t)_{t \geq 0}$  est supposé être un PI arbitraire
- 2 Flux d'entrée associé à l'état  $i$  arbitraire :  $r_i \geq 0, \forall i \in S$
- 3 Flux de sortie variable :  $c_i \geq 0, \forall i \in S$
- 4  $D = \text{diag}(d_i, i \in S)$  peut être singulière

# Solution du modèle général ( $B = \infty$ )

Pour  $D$  inversible ou singulière, on a :

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{k \geq 0} e^{-\frac{\lambda x}{d}} \frac{(\frac{\lambda x}{d})^k}{k!} \mathbf{b}(k) \text{ avec } \mathbf{b}(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{b}(n, k)$$

La suite  $(\mathbf{b}(n, k))_{0 \leq k \leq n}$  est définie par :

•  $i \in S^+$

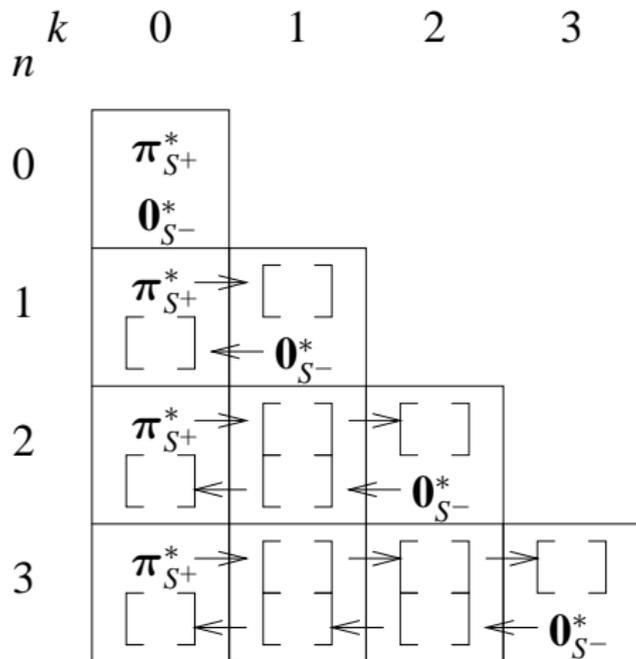
$$b_i(n, k) = \begin{cases} (1 - \frac{d}{d_i})b_i(n, k-1) + \frac{d}{d_i} \sum_{j \in S} b_j(n-1, k-1)P_{ji} & \text{pour } k > 0 \\ \pi_i & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

•  $i \in S^-$

$$b_i(n, k) = \begin{cases} \frac{-d_i}{d - d_i} b_i(n, k+1) + \frac{d}{d - d_i} \sum_{j \in S} b_j(n-1, k)P_{ji} & \text{pour } k < n \\ 0 & \text{pour } k = n \end{cases}$$

$$0 \leq b_i(n, k) \leq \pi_i, \forall i \in S$$

# Calcul des vecteurs $\mathbf{b}(n, k)$



A partir de quel rang  $n$ , la limite de  $(\mathbf{b}(n, k))_{n \geq k}$  est-elle atteinte ?

- 1 Déterminer le rang  $n_\infty = \min\{n \in \mathbb{N} / \mathbf{b}(n, 0)\mathbf{d}^* \leq d\varepsilon \text{ et } \mathbf{b}(n, n)\mathbf{1}^* \leq \varepsilon\}$
- 2 On a  $\mathbf{b}(n_\infty, k) \simeq \mathbf{b}(k)$  à  $\varepsilon$  près
- 3 Considérer le rang  $N(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} / \sum_{k=0}^n e^{-\frac{\lambda x}{d}} \frac{(\frac{\lambda x}{d})^k}{k!} \geq 1 - \varepsilon\}$
- 4 Alors, on obtient :

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} e^{-\frac{\lambda x}{d}} \frac{(\frac{\lambda x}{d})^k}{k!} \mathbf{b}(n_\infty, k) + e(n_\infty, N(\varepsilon))$$

avec  $0 \leq e(n_\infty, N(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$

## Remarque

Par opposition aux files d'attente discrètes, on a :

$$\mathbb{P}(Q_\infty > 0) \neq \rho \quad \text{où } \rho \text{ est l'intensité du trafic}$$

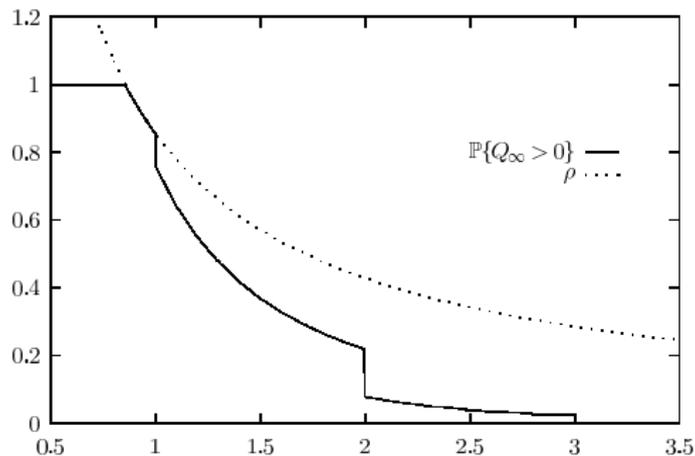


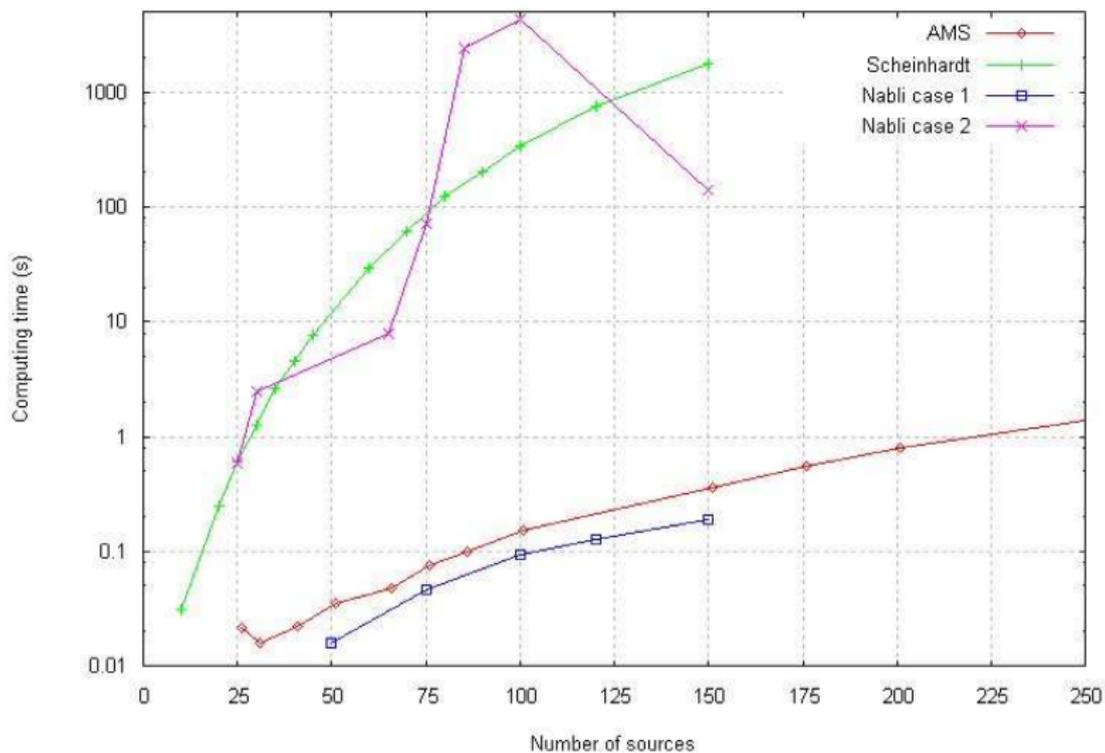
Figure:  $\rho = \frac{6}{7c}$  et  $\mathbb{P}(Q_\infty > 0)$  en fonction de  $c$

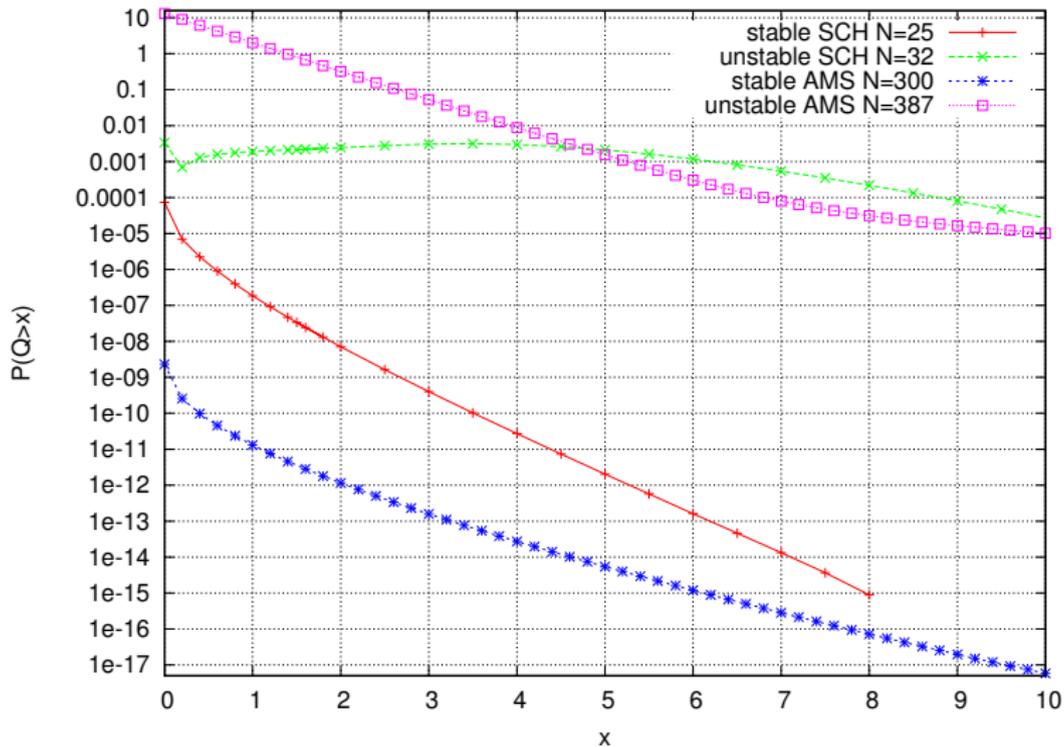
## Critères

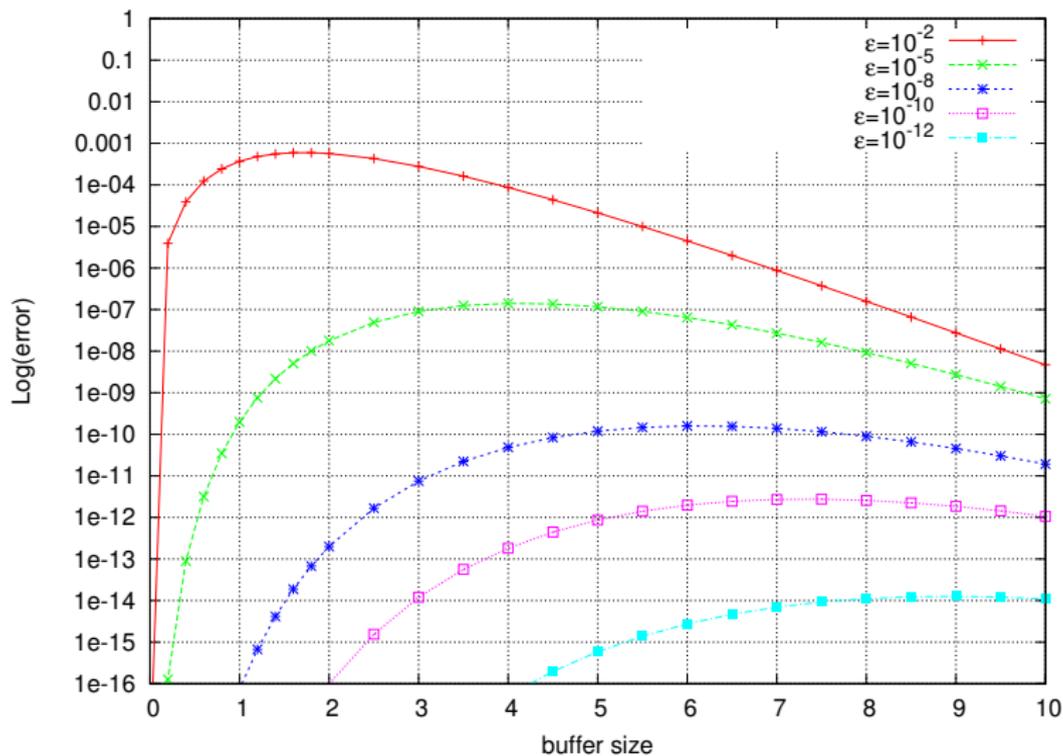
- Complexité temporelle
- Stabilité numérique
- Précision

## Modèle considéré

Pour pouvoir comparer les différentes méthodes, on est contraint de choisir le modèle le moins général à savoir AMS.







- Conclusion

La méthode basée sur l'uniformisation est :

- Générale
- Numériquement stable
- Précise
- Parfois pénalisée en temps de calcul

- Perspectives

- Construire et définir un objet mathématique qui mesure la vitesse de convergence de la suite  $(\mathbf{b}(n, k))_{n \geq k}$  vers sa limite  $\mathbf{b}(k)$
- Calculer les différents moments de  $Q_\infty$
- Etudier deux buffers en série

Merci